Clasa a 4-a

Problema 1: Determinați numerele naturale n pentru care $n+s+p=121$. Am notat cu s suma cifrelor lui n și cu p produsul cifrelor lui n.

Soluție:

Dacă n are o singură cifră, atunci $n=s=p$ și $n+s+p \leq 27$, deci e imposibil 1p

Dacă n are două cifre, atunci $n=\overline{ab}$ rezultă $\overline{ab}+a+b+ab=121$

Obținem după descompunere $11a+2b+ab=121$

$2b+ab=121-11a \Rightarrow b(a+2)=11(11-a)$, deci $a=9, b=2$ 2p

Dacă n are trei cifre, atunci $n=\overline{abc} \Rightarrow \overline{abc}+a+b+c+abc=121$, deci $a=1$

$\overline{1bc}+1+b+c+abc=121 \Rightarrow 100+\overline{bc}+1+b+c+abc=121$, de unde $\overline{bc}+b+c+bc=20$

Din $\overline{bc} \leq 20$, rezultă $b=1, c=3$ 2p

Dacă n are patru cifre, atunci $n+s+p \geq 1000$, deci e imposibil 1p

Finalizare: n poate fi 92 sau 113 1p

Problema 2: La ora de matematică, un elev a folosit inteligența artificială pentru a genera automat pe tabla interactivă un șir de numere de la 1 la 2024.

a) Aflați suma tuturor numerelor pare generate și suma tuturor numerelor impare generate.

b) Un elev joacă următorul joc: șterge pe rând câte două numere oarecare de pe tablă și scrie în locul lor un număr egal cu diferența lor. Este posibil ca, la un moment dat, suma numerelor rămase pe tablă să fie egală cu 10101? Justificați răspunsul.

Soluție:

a) Suma nr pare: $2+4+6+\ldots+2024=2(1+2+3+\ldots+1012)=2[(1012\cdot 1013):2]=1025156$

$1+2+3+\ldots+2024=(2024\cdot 2025):2=2049300$ 2p

Suma nr impare: $2049300-1025156=1024144$ 1p

b) Suma numerelor de pe tabla interactivă este 2049300, deci pară Indiferent de câte ori se joacă jocul, avem următoarele situații:

1. Dacă se șterg două numere pare, diferența acestora este tot un număr par, atunci cum suma numerelor rămase este pară, suma finală este pară. 1p
2. Dacă se șterg două numere impare, diferența acestora este un număr par, atunci cum suma numerelor rămase este pară, suma finală este pară. 1p
3. Dacă se șterg un număr par și unul impar, diferența acestora este un număr impar, atunci cum suma numerelor rămase este impară, suma finală este pară. 1p

Finalizare: După oricât de mulți pași ai jocului, suma numerelor rămasă pe tablă este pară, deci nu poate fi egală 10101. 1p

Problema 3: Într-o cursă din faimoasa lume a insectelor, greierele este în urma lăcustei, care are 150 de sărituri înaintea lui. Câte sărituri trebuie să facă greierele ca să ajungă lăcusta ştiind că, pe când greierele face 10 sărituri, lăcusta face 11, dar 5 sărituri ale greierelui fac cât 8 sărituri ale lăcustei?

Soluție:

Dacă 5 sărituri ale greierelui fac cât 8 ale lăcustei, atunci 10 sărituri ale greierelui fac cât 16 ale lăcustei. 2p

Așadar la 10 sărituri, greierele câştigă un spaţiu echivalent cu $5(16-11)$ sărituri ale lăcustei. 2p

Pentru recuperarea celor 150 de sărituri pe care le are lăcusta ca avans, trebuie 30 de seturi de 10 sărituri ale greierelui ($150 : 5 = 30$). 2p

Finalizare: Greierele va ajunge lăcusta după 300 de sărituri (30X10=300). 1p

Problema 4 Determinaţi numerele naturale a și b care verifică egalitatea: $2024 : [206 + (a + b)x5] = 23$.

206+(a+b)x5=88 ...**2p**

Dar 88-206¡0 ...**2p**

Nu exista solutii ...**3p**

Din cauza unei erori de scriere, fiecare elev va primi punctaj maxim la aceasta problema.

Clasa a 5-a

Problema 1
$s = \overline{abc}$, a+b+c=15, $a \cdot b \cdot c = 80$, $s \vdots 5 \Longrightarrow c = 5$, altfel pt c=0$\longrightarrow a \cdot b \cdot c = 0$ ...**2p**
Dacă c=5, atunci a+b=10 și $a \cdot b = 16$...**2p**
$\Longrightarrow a = 2, b = 8 \Longrightarrow s = 285$...**1p**
$\Longrightarrow a = 8, b = 2 \Longrightarrow s = 825$...**1p**
$\Longrightarrow$ 2 cazuri ... **1p**

Problema 2
$m^2 + n^2 = 121$ și $m^2 : n^2 = 9$ rest $4 \Longrightarrow m^2 = 9n^2 + 4$ ...**2p**
$\Longrightarrow 10n^2 + 4 = 121 \Longrightarrow 10n^2 = 117$, dar 117 $\not\vdots 10$ si $n \in \mathbb{N}$ ...**3p**
$\Longrightarrow$ nu există soluții pt m și n în aceste condiții **2p**

Problema 3: Determinați suma numerelor naturale de forma $\overline{ab5c}$ care împărțite la un număr natural de două cifre dau restul 98, iar produsul cifrelor este 0.
Soluție:
$\overline{ab5c} : î = C$ rest 98, dar $98 <$ î și î are două cifre $\Rightarrow$ î$= 99$ 1p
Pentru că produsul cifrelor numărului $\overline{ab5c}$ este 0 atunci b sau c este 0 1p
Dacă $\overline{ab5c}$ are 4 cifre, atunci $10 \le C \le 100$ 1p
Dacă $c = 0$ și folosind teorema împărțirii cu rest avem $\overline{ab50} = 99C + 98$. 1p
Cum cifra unităților numărului căutat este 0, C are ultima cifră 8, iar pentru că cifra zecilor este 5, atunci $C = 48$, deci $\overline{ab50} = 99 \cdot 48 + 98 = 4850$ 1p
Dacă $b = 0$, atunci $\overline{a05c} = 99C + 98$. Cum cifra zecilor numărului căutat este 5, $39 \le C \le 49$, iar pentru că cifra sutelor este 0, atunci $C = 40$, deci $\overline{a05c} = 99 \cdot 40 + 98 = 4058$ 1p
Finalizare: Suma numerelor căutate este: $4850 + 4058 = 8908$ 1p

Problema 4
a) $\overline{abc} = 4(d+1) - 1$, $\overline{abc} = 4^2(e+1) - 1$, $\overline{abc} = 4^3(f+1) - 1$, $\overline{abc} = 4^4(g+1) - 1$ ...**1p**
$\Longrightarrow \overline{abc} \in (\mathcal{M}_{256} - 1) = \{255, 511, 767\}$ ...**1p**
Dar 2+5+5=12$\vdots$3 $\Longrightarrow \overline{abc} = 255$ ...**1p**

b) $\overline{abcd} = 4e + A$, $\overline{abcd} = 4^2 f + B$, $\overline{abcd} = 4^3 g + C$, $\overline{abcd} = 4^4 h + D$, $\overline{abcd} = 4^5 j + E$, $\overline{abcd} = 4^6 k + F$ ...**2p**
Dacă dorim cel mai mic număr pentru care avem doar 3 cifre de 0 $\Longrightarrow A = B = C = 0$ ...**1p**
Atunci D=E=F=1 $\Longrightarrow \overline{abcd} - 1 \in \mathcal{M}_{256} = \{1024, ...\} \Longrightarrow \overline{abcd} = 1025$ ...**1p**

Clasa a 6-a

Problema 1
$s = \overline{abc}$, $s = a + b + c$, $P = a \cdot b \cdot c$ prim $\longrightarrow$ doi factori sunt egali cu cifra 1 ...**3p**
Atunci obținem că a treia cifră este 7 ...**2p**
Astfel obținem soluțiile: 117,171,711 ...**2p**

Problema 2
card(X)=card(Y)=3, card($U \cap V$)=1 $\Longrightarrow$ card($X \cup Y$)=2 ...**2p**
card(X-Y)=card(Y-X)=2, $5 \in X, 3 \in Y \Longrightarrow 1, 4, 6, 7, 8, 9 \notin X$ ...**3p**
Atunci, dacă $card(X \cap Y) = card(Y \cap X) = 2 \Longrightarrow X = \{2, 3, 5\}$ si $Y = \{1, 3, 7\}$...**2p**

Problema 3
$$\frac{90^\circ - (180^\circ - D)}{180^\circ - D} = \frac{3}{4} \Longrightarrow D = \frac{900^\circ}{7}$$ ...**2p**
$$\frac{90^\circ - E}{180^\circ - (90^\circ - E)} = \frac{5}{6} \Longrightarrow E = \frac{90^\circ}{11}$$ ... **2p**
$$\frac{F}{90^\circ - F} = \frac{6}{7} \Longrightarrow F = \frac{540^\circ}{13}$$ ...**2p**
$$\frac{D + 1,5 \cdot (E + F) + E \cdot 0,3 - F : 5}{D + E + F} = \frac{10972}{9915}$$ ...**1p**

Problema 4
Dacă cele doua unghiuri se află de aceeași parte a lui [MN], atunci obținem că $\triangle MNO$ obtuzunghic ...**3p**
$\Longrightarrow \angle N < 90^\circ$ ...**2p**
$\Longrightarrow MN \not\perp ON$ ... **2p**

Clasa a 7-a

Problema 1
(3z-4)|(5z+6) si (3z-4)|(3z-4) ...**2p**
$\implies (3z-4) \in \mathcal{D}_{38}$, $z \in \mathbb{Z}$ ...**3p**
$z \in \{-5, 1, 14\}$ ...**2p**

Problema 2
a+b=20$\implies a = -b + 20$ ...**1p**
$a \cdot b = -b^2 + 20b$ ...**1p**
Presupunem că $a \cdot b = x \implies b^2 - 20b + x = 0 \implies (b-10)^2 + x - 100 = 0$ ...**2p**
$b = \pm\sqrt{100-x} + 10$, pentru ca radicalul sa fie bine definit $100 - x \geq 0 \implies 100 \geq x$ ...**1p**
Luam x=100 ... **1p**
Verificare $a \cdot b = 100$ ...**1p**

Problema 3
$\triangle STU$ isoscel, TZ=ZU $\implies$ SZ este înalțime $\implies \angle SZU = 90°$...**2p**
$\implies \triangle SZX$ dreptunghic, SY=XY ...**2p**
$\implies$ ZY mediană ...**1p**
$\implies ZY = \dfrac{XS}{2} = YX \implies \triangle ZYX$ isoșcel ...**2p**

Problema 4
$\angle ISC \equiv \angle SIP$, $IP \perp SC \implies \triangle SIP$ este dreptunghic isoșcel $\implies SP = IP = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ si $\angle S = 45° \implies \angle SCL = 135°$ ...**2p**
PR=RC=RI, $\triangle SPC$ dreptunghic și $PR \perp IC \implies \triangle$ IPC este dreptunghic isoșcel$\implies$ $PC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ ...**2p**
$IP \perp SC$, $LX \perp SC$ și SCLI este un paralelogram $\implies$ IPXL dreptunghi ...**1p**
Dacă $\angle SCL = 135° \implies \angle LCX = 45°, \triangle LCX$ dreptunghic$\implies CX = XL$, $IP = XL = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ ...**1p**
În $\triangle SXL$ dreptunghic în $\angle X \implies SL = a\sqrt{5}$ ...**1p**

Clasa a 8-a

Problema 1

a) $x^2 + y^2 = 24$ și $x \cdot y = 12 \Longrightarrow (x + y)^2 = 48$ ...**1p**
$\Longrightarrow x + y = 4\sqrt{3} \Longrightarrow x = 4\sqrt{3} - y$ ...**1p**
Înlocuind în $x \cdot y = 12$, obținem că $-y^2 + 4\sqrt{3}y - 12 = 0 \Longrightarrow x = y = 2\sqrt{3}$ ...**1p**

b) $x^2 + y^2 = 25$ și $a \cdot x \cdot y = 30 \Longrightarrow x = \dfrac{30}{ay} \Longrightarrow a^2y^4 - 25a^2y^2 + 900 = 0$ ...**1p**
Notăm $y^2 = t$ și obținem $a^2t^2 - 25a^2t + 900 = 0$ ...**1p**
Se demonstreaza ca $\Delta = 25a^2(25a^2 - 144) < 0$ ...**1p**
Atunci $a \in (-\dfrac{12}{5}, \dfrac{12}{5})$ ...**1p**

Problema 2

$-2s - 1 < x^2 - s < 2s + 1 \Longrightarrow -s - 1 < x^2 < 3s + 1 \Longrightarrow -(s + 1) < x^2 < 3s + 1$ ...**2p**
Dar $s \geq 0 \Longrightarrow -(s + 1) < 0$, dar $x^2 \geq 0$ ...**2p**
$\Longrightarrow x^2 \in (0, \sqrt{3s + 1}) \Longrightarrow x \in (-\sqrt{3s + 1}, \sqrt{3s + 1})$ ...**2p**
Pentru s=0$\Longrightarrow x \in (-1, 1) - \{0\}$ ...**1p**

Problema 3

a)$\triangle C_1C_2C$, din Teorema Bisectoarei obținem că $C_1C_2 = \dfrac{C_1C_3 \cdot C_2C}{C_3C}$ ...**1p**

$A_{\triangle CC_1C_2} = \dfrac{C_1C_2 \cdot C_2C \cdot sin(C_2)}{2} \Longrightarrow sin(C_2) = \dfrac{2 \cdot A_{\triangle CC_1C_2} \cdot C_3C}{C_1C_3 \cdot C_2C^2}$ ...**2p**

b) $sin(\dfrac{C}{2}) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \angle C = 60°$ ...**1p**
$\angle C_3 = 120°$ ...**1p**
$\Longrightarrow CC_3C_2 = 90°, \angle C_2C_1C_3 = 30°$ si $\angle B = 90°$ ...**1p**
Dacă $\angle C = 60°, \angle B = 90° \Longrightarrow \triangle ABC$ este dreptunghic, iar din Teorema unghiului de $30°$ obținem că $BC = 2 \cdot AC$ ...**1p**

Problema 4

a) ABCO - romb$\Longrightarrow AC = L\sqrt{3} = a\sqrt{3}$, ABCDEF este un hexagon regulat, deci obținem că AE=EC=$a\sqrt{3}$ și KE=$2 \cdot a \Longrightarrow AK = KC = a\sqrt{7}$ ...**1p**

$\triangle AKC$ isoșcel $\Longrightarrow A_{\triangle AKC} = \dfrac{AC \cdot h}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}a^2}{4}$, unde $h = \dfrac{5 \cdot a}{2}$ ...**1p**

$A_{\triangle AKC} = \dfrac{7a^2 \cdot sin(K)}{2} \Longrightarrow sin(K) = \dfrac{5\sqrt{3}}{14} = \sqrt{\dfrac{75}{196}} > \sqrt{\dfrac{49}{196}} = \dfrac{1}{2}$ ...**1p**

b) AB=AG=x$\Longrightarrow AB = BO = VO = x \Longrightarrow \triangle VOB$ isoșcel $\Longrightarrow VB = a\sqrt{2}$ ...**1p**

$A_{\triangle VBA} = \dfrac{BA \cdot h}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{7}}{4}$, unde știm că $h = \dfrac{x\sqrt{7}}{2}$ și $A_{ABHG} = x^2$ ...**2p**

$\Longrightarrow \dfrac{A_{ABHG}}{A_{\triangle VBA}} = \sqrt{\dfrac{16}{7}} = \sqrt{2,(2)} \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ...**1p**