

Concursul Centrului de Excelență *Spectrum Cluj*
ediția I – etapa a II-a
Cluj-Napoca, 6 mai 2016
Clasa a IV-a

Barem de evaluare

Subiectul I. Determinați x din egalitatea $\{110 - [30 + (40 - 40 : x) : 5] \cdot 3\} - 2 = 0$.

Soluție:

$$\{110 - [30 + (40 - 40 : x) : 5] \cdot 3\} - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$110 - [30 + (40 - 40 : x) : 5] \cdot 3 = 0 + 2 \Rightarrow$$

(1p) $110 - [30 + (40 - 40 : x) : 5] \cdot 3 = 2 \Rightarrow$

$$[30 + (40 - 40 : x) : 5] \cdot 3 = 110 - 2 \Rightarrow$$

(1p) $[30 + (40 - 40 : x) : 5] \cdot 3 = 108 \Rightarrow$

$$30 + (40 - 40 : x) : 5 = 108 : 3 \Rightarrow$$

(1p) $30 + (40 - 40 : x) : 5 = 36 \Rightarrow$

$$(40 - 40 : x) : 5 = 36 - 30 \Rightarrow$$

(1p) $(40 - 40 : x) : 5 = 6 \Rightarrow$

$$40 - 40 : x = 6 \cdot 5 \Rightarrow$$

(1p) $40 - 40 : x = 30 \Rightarrow$

$$40 : x = 40 - 30 \Rightarrow$$

(1p) $40 : x = 10 \Rightarrow$

$$x = 40 : 10 \Rightarrow$$

(1p) $x = 4$.

Subiectul II. Dacă veverița pune în fiecare dintre cămările sale câte 8 nuci, îi rămân 9 nuci afară, iar dacă pune câte 9 nuci îi rămân 2 nuci afară. Câte cămări și câte nuci are veverița?

Soluție:

(1p) Fie c numărul de cămări și n numărul de nuci ale veveriței.

Conform enunțului avem că $n = 8c + 9 = 9c + 2$.

(3p) $8c + 9 = 9c + 2 \Rightarrow 9 - 2 = 9c - 8c \Rightarrow c = 7$.

(2p) Cum $n = 8c + 9$ și $c = 7 \Rightarrow n = 8 \cdot 7 + 9 \Rightarrow n = 56 + 9 \Rightarrow n = 65$.

(1p) Răspuns: Veverița are 7 cămări și 65 nuci.

Subiectul III. Numărul \overline{abc} se împarte exact la succesorul numărului $2 \cdot \overline{ab}$, dând câtul c și restul 0.

- Dați un exemplu de număr \overline{abc} cu proprietatea din enunț și efectuați verificarea;
- Câte numere \overline{abc} au această proprietate? Explicați.

Soluție:

(1p) Succesorul numărului $2 \cdot \overline{ab}$ este $2 \cdot \overline{ab} + 1$

Conform enunțului avem că $\overline{abc} : (2 \cdot \overline{ab} + 1) = c$.

(1p) $\overline{abc} : (2 \cdot \overline{ab} + 1) = c \Leftrightarrow \overline{abc} = c \cdot (2 \cdot \overline{ab} + 1) \Leftrightarrow$

(1p) $\overline{abc} = c \cdot 2 \cdot \overline{ab} + c \cdot 1 \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot 10 + c = c \cdot 2 \cdot \overline{ab} + c \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot 10 = c \cdot 2 \cdot \overline{ab} \Leftrightarrow 10 = c \cdot 2 \Leftrightarrow c = 5$.

(1p) a) Un exemplu de număr este $\overline{abc} = 105$.

(1p) Verificare: $\overline{abc} : (2 \cdot \overline{ab} + 1) = 105 : (2 \cdot 10 + 1) = 105 : 21 = 5 = c$.

b) Nu avem nici o condiție pentru cifrele $a \neq 0$ și b ; iar $c = 5$.

(1p) Deci \overline{abc} poate fi oricare dintre numerele 105, 115, 125, ..., 195, 205, 215, 225, ..., 995.

A număra aceste numere este același lucru cu a număra numerele 10, 11, 12, ..., 99; care sunt în număr de $99 - 9 = 90$.

(1p) Răspuns: 90 de numere.

Subiectul IV.

- Calculați numărul de cifre ale numărului

$$N = 12345678910111213 \dots 148149150.$$

- Calculați:

$$M = 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2017 - 2 - 4 - 6 - 8 - \dots - 2016.$$

Soluție:

- Observăm că numărul N poate fi împărțit în 3 blocuri (un bloc cu numere de o cifră, unul cu numere de 2 cifre și unul cu numere de 3 cifre) astfel:

$$(1p) \quad N = \underbrace{123456789}_A \underbrace{10111213 \dots 99}_{B} \underbrace{100101 \dots 148149150}_C$$

În blocul A avem 9 numere de o cifră. Deci în blocul A avem 9 cifre

În blocul B avem numerele de 2 cifre: 10, 11, 12, ..., 99.

Ele sunt în număr de $99 - 9 = 90$.

(1p) Deci în blocul B avem $2 \cdot 90 = 180$ cifre.

În blocul C avem numerele de 3 cifre: 100, 101, 102, ..., 150.

Ele sunt în număr de $150 - 99 = 51$.

(1p) Deci în blocul C avem $3 \cdot 51 = 153$ cifre.

(1p) Răspuns: N are $9 + 180 + 153 = 342$ cifre.

- $M = 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2017 - 2 - 4 - 6 - 8 - \dots - 2016 \Leftrightarrow$

(1p) $M = (3 - 2) + (5 - 4) + (7 - 6) + (9 - 8) + \dots + (2017 - 2016) \Leftrightarrow$

(1p) $M = \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{1008 \text{ ori}} \Leftrightarrow M = 1 \cdot 1008 \Leftrightarrow M = 1008$

(1p) Răspuns: $M = 1008$.